Mathématiques fondamentales

Par Dimitri PIANETA

2019

Table des matières

Chapitre 1 4

Définitions, théorèmes et démonstrations 4

1.1 Significations 4

1.2 Définitions 4

1.3 Les énoncés vraies 4

1.3.1 Théorèmes et propositions 4

1.3.2 Lemmes 4

1.3.3 Corollaires 4

1.4 Les autres termes 4

1.4.1 Les démonstrations 4

1.4.2 Les conjectures 4

1.4.3 Les axiomes 4

Chapitre 2 5

Comment lire une définition ? 5

2.1 Qu'est-ce qu'une définition ? 5

2.2 A quoi avons-nous affaire ? 5

2.3 Quels exemples ai-je de cette définition ? 5

2.4 Trouvez des exemples types 5

2.5 Trouvez des exemples triviaux 5

2.6 Trouvez des exemples extrêmes 5

Chapitre 3 6

Comment lire un théorème ? 6

3.1 Evaluez une hypothèse 6

3.2 Observez le en détail 6

Chapitre 4 7

Démonstration et lire une démonstration ? 7

4.1 Qu'est-ce qu'une démonstration ? 7

4.2 Comment lire une démonstration ? 7

Chapitre 5 8

Les ensembles algébriques 8

5.1 Théorie générale 8

5.2 Ensembles, sous-ensembles et éléments 8

5.3 Intersection, réunion et produit d'ensemble 8

5.4 Cardinal 9
Références 10

Chapitre 1

Définitions, théorèmes et démonstrations

1.1 Significations

Définition : explication sur la signification mathématique du mot.
Théorème : un énoncé vrai très important.
Proposition : un énoncé vrai, moins important, mais néanmoins très intéressant.
Lemme : un énoncé vrai utilisé pour démontrer d'autres énoncés vrais.
Corollaire : un énoncé vrai qui est simple déduction d'un théorème ou d'une proposition.
Démonstration : établissement de la vérité d'un énoncé.
Conjecture : un énoncé que l'on pense être vrai, mais dont on n'a pas la démonstration.
Axiome : une supposition de base pour une situation mathématique.

1.2 Définitions

Une définition mathématique donne la spécification d'un mot (ou d'une expression) et ce de manière particulière. Le mot (ou l'expression) est généralement défini(e) en termes de propriétés.

1.3 Les énoncés vraies

1.3.1 Théorèmes et propositions

Les énoncés mathématiques les plus importants sont les **théorèmes.** Tout résultat important est appelé théorème. Nous utilisons le terme **proposition** pour des résultats de moindre importance mais malgré tout intéressant. Il est difficile de produire des exemples montrant la différence entre les deux.

1.3.2 Lemmes

Un lemme est un énoncé qui constitue une étape dans la démonstration d'un autre énoncé. Les lemmes sont considérés de moindre importance que les propositions mais de nouveau cette distinction est relativement floue. Il est intéressant d'observer qu'il peut se faire que ces résultats soient plus utiles que le résultat qu'ils contribuent à démontrer.

1.3.3 Corollaires

Un corolaire est énoncé présentant un intérêt et qui découle d'un théorème ou d'une proposition.

1.4 Les autres termes

1.4.1 Les démonstrations

Les mathématiciens résolvent des problèmes – la démonstration est la garantie que leur solution est correcte.

Une démonstration développe la justification de la vérité d'un énoncé.

1.4.2 Les conjectures

Une conjecture est un énoncé que nous pensons bien être vrai mais pour lequel nous ne disposons pas de démonstration. Les conjectures sont faciles à faire. De bonnes conjectures sont plus difficiles.

1.4.3 Les axiomes

Un axiome est une supposition de base sur une situation mathématique. Les axiomes peuvent être considérés comme des faits qui ne nécessitent pas de justification ; ils peuvent être utiliser dans des définitions.

Chapitre 2

Comment lire une définition ?

2.1 Qu'est-ce qu'une définition ?

Une définition mathématique donne la signification d'un mot (ou d'une expression) et ce de manière particulière. Le mot (ou l'expression) est généralement défini(e) en termes de propriétés.

2.2 A quoi avons-nous affaire ?

Le premier travail est d'identifier ce avec qui nous allons travailler. Est-ce quelque chose que nous connaissons déjà, avec une propriété supplémentaire ?

Nous pouvons également nous poser d'autres questions. Est-ce différent ou semblable à une définirons antérieure ? Y a-t-il une analogie avec quelque chose d'autre ? Est-ce une définition bien connue à laquelle on a adjoint des nouvelles conditions ?

2.3 Quels exemples ai-je de cette définition ?

A partir d'une définition donnée, nous devons nous demander su de tels objets existent. C'est vrai qu'il est fort eu probable que l'on vous donne une définition d'un objet qui n'existe pas ! Cette remarque a pour but de mobiliser votre compréhension en étant d'abord sceptique.

2.4 Trouvez des exemples types

Parmi tous les exemples il est nécessaire d'en dégager des exemples-types qui mettent bien en évidence les propriétés et, plus important encore, qui nous aident à nous souvenir de la définition. Il faut donc choisir un exemple correct.

L'intérêt des exemples types est de que nous pouvons les utiliser aisément pour l'analyse de théorèmes ou pour approfondir notre compréhension.

2.5 Trouvez des exemples triviaux

Le concept d'« d'exemple triviale » est relativement objectif – il dépend souvent du contexte. A la base, un objet est trivial s'il constitue un exemple évident. Nous cherchons des exemples vraiment très simples. Les exemples triviaux peuvent nous aider à développer notre perception d'une définition, et sont intéressants quand nous analysons un théorème et sa démonstration.

2.6 Trouvez des exemples extrêmes

La démarche est analogue à ce qui précède. Ici aussi cela dépend du contexte. Ici j'emploie le terme « extrême » pour signifier que je me mets aux limites de la définition.

Chapitre 3

Comment lire un théorème ?

3.1 Evaluez une hypothèse

Il est bon de savoir si les hypothèses sont fortement restrictives ou non et quelle est la force des conclusions. Les meilleurs théorèmes sont ceux où les hypothèses sont faibles (peu contraignantes) et où les conclusions sont fortes. La force et la faiblesse dont il est question sont assez subjectives, de nouveau sujet à discussion.

Une **hypothèse forte** fait que le théorème porte sur un nombre restreint d'objet.

Une **conclusion forte** dit quelque chose de bien déterminé et de précis sur ces objets.

3.2 Observez le en détail

Dans la formulation d'un théorème, pratiquement tous les mots sont importants – même les « petits » mots. Lisez et prenez en compte chaque mot et ayez bien en tête leur signification.

Chapitre 4

Démonstration et lire une démonstration ?

4.1 Qu'est-ce qu'une démonstration ?

Une démonstration est une explication de ce qu'un énoncé est vrai. Plus précisément c'est une explication convaincante des raisons pour lesquelles un énoncé est vrai. Par « convaincante », je veux dire que ça l'est pour un mathématicien.

Les énoncés sont habituellement démontrés en partant de quelques énoncés évidents, et par le biais d'étapes logiques, en appliquant des définitions, des axiomes ou des résultats démontrés auparavant, on aboutit au résultat annoncé.

4.2 Comment lire une démonstration ?

La technique est de repérer les mots clés. Scindez la démonstration en parties indépendantes d'un point de vue logique. Une démonstration n'est habituellement pas un seul raisonnement qui se développe, mais une suite d'argumentations séparées à analyser.

Identifiez les méthodes utilisées.

Repérez où les hypothèses sont utilisés.

Appliquez la démonstration par un exemple.

Faire un schéma.

Débusquez les erreurs en testant des cas extrêmes.

Chapitre 5

Les ensembles algébriques

5.1 Théorie générale

La notion de classe ou d'ensemble d'objets est l'une des plus fondamentales en mathématiques. Un ensemble est défini à partir d'une propriété quelconque ou d'un attribut quelconque A, que tout objet considéré peut posséder ou non ; les objets qui possèdent cette propriété contribuent l'ensemble A correspondant. Si l'on considère par exemple les nombres entiers, et la propriété A d'être un nombre premier, l'ensemble correspondant A est l'ensemble de tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7 ….

Je peux citer les ensembles importants :

$$\mathbb{B}\ est\ l'ensemble\ des\ bits.$$

$$\mathbb{N}\ est\ l'ensemble\ des\ entiers\ naturels.$$

$$\mathbb{Z}\ est\ l'ensemble\ des\ entiers\ relatifs.$$

$$\mathbb{R}\ est\ l'ensemble\ des\ nombres\ réels$$

Les ensembles directement fabriqués à partir de ceux-ci sont souvent désignés par une juxtaposition de symboles qui sert à rappeler comment ils sont construits : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{B}^N$.

On dit que l'ensemble A est *sous-ensemble* de l'ensemble B s'il n'y a aucun objet A qui ne soit également dans B. Si tel est le cas on écrit

5.2 Ensembles, sous-ensembles et éléments

Définition :

Un ensemble est une collection d'objets (que l'on appelle alors éléments) ayant une propriété commune.

Si x est un élément de l'ensemble A, alors x appartient à A, ce qui noté $x \in A$.

Sinon x n'appartient pas à A ce qui est noté $x \notin A$.

Si tous les éléments d'un ensemble A appartiennent à B, alors A est inclus dans B, ce qui est noté $A \subset B$.

Si au moins un élément de A n'est pas dans B, alors A n'est pas inclus dans B ce qui est noté $A \not\subset B$.

5.3 Intersection, réunion et produit d'ensemble

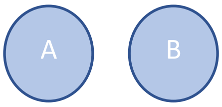
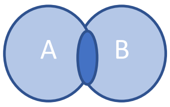
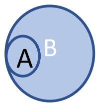
Définition :

Soient A et B deux ensembles. L'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B constitue l'intersection de A et de B, ce qui est noté $A \cap B$ (ce dit signifie A inter B). L'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B constitue la réunion de A et de B, ce qui est noté $A \cup B$ (ce qui signifie A union B).

Remarques :

Le « ou » de la définition de l'union et inclusif, c'est-à-dire que si un élément est dans A et dans B alors il fait partie des éléments qui sont dans A ou dans B : $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

En utilisant les diagrammes de Venn, représentons les trois situations possibles lorsqu'il y a deux ensembles :

Situation	**Les deux ensembles sont disjoints**	**Les deux ensembles ont une intersection non vide**	**Un ensemble est totalement inclus dabs l'autre**
Diagramme de Venn			
$A \cap B$	$\emptyset$	$A \cap B$ est la région le plus foncée qui commune aux deux ensembles.	A
$A \cup B$	$A \cup B$ est l'ensemble des zones colorées.	$A \cup B$ est l'ensemble de la région coloré.	B

Propriétés :

$$A \cap B(\cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup B(\cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5.4 Cardinal

Définition :

Si un ensemble A comporte un nombre fini d'éléments, alors A est fini et ce nombre d'éléments est cardinal noté Card(A).

Voici quelques priorités :

$$Card(A \cap B) \leq Card(A) \leq Card(A \cup B) \; et \; Card(A \cap B) \leq Card(B) \leq Card(A \cup B)$$

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - \; Card(A \cap B)$$

Références

K. HOUSTON, Comment penser comme un mathématicien, 2011, de boeck.

R. COURANT et H. ROBBINS, Qu'est-ce les mathématiques, 2015, Cassini.

C. DESCHAMPS et André WARUSFEL, Mathématiques Tout en un 1 année, MPSI, 2003, DUNOD

J. VELU, Méthodes mathématiques pour l'informatique, 5 éditions, 2013, DUNOD

Collectifs, Informatique Inf, 2017, DUNOD